

Федеральное агентство по образованию Российской Федерации

Федеральное государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет математики, механики и компьютерных наук

Рассмотрено и рекомендовано  
на заседании кафедры прикладной математики и про-  
граммирования ЮФУ

Протокол № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 2008 г.

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ Жуков М. Ю.

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета математики, механики и компь-  
ютерных наук

\_\_\_\_\_ Карякин М. И.

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2008 г.

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС**  
учебной дисциплины

**«Вычислительная математика»**

вузовского компонента цикла ОПД для бакалаврской образователь-  
ной программы по направлению 230201

«Информационные системы и технологии»

Составитель: Прозоров О. А.

Ростов-на-Дону

2008

## Пояснительная записка

Объектами профессиональной деятельности инженера по направлению “Информационные системы” являются информационные системы и сети, их математическое, информационное и программное обеспечение, способы и методы проектирования, отладки, производства и эксплуатации программных средств информационных систем в различных областях человеческой деятельности.

Использование ЭВМ позволило от простейших расчетов и оценок различных конструкций или процессов перейти к новой стадии работы — детальному математическому моделированию (вычислительному эксперименту), которое существенно сокращает потребность в натуральных экспериментах, а в ряде случаев может их заменить.

В основе вычислительного эксперимента лежит решение уравнений математической модели численными методами. Для инженеров, сталкивающихся с подобными задачами, важным часто оказывается знание уже разработанных численных методов, возможности и области их применения. Данный курс рассчитан на слушателя, который занимается не столько разработкой численных методов, сколько их применением к инженерным задачам. Целью курса является введение в численные методы, освещение того круга вопросов, знание которого наиболее часто требуется в практике вычислений.

В настоящее время интенсивно развиваются интегрированные среды, основанные на алгоритмических языках, и растет применение универсальных математических систем (Maple, MATLAB, и др.). Эти системы имеют дружественный интерфейс, реализуют множество стандартных и специальных математических операций, снабжены мощными графическими средствами и обладают собственными языками программирования. Все это предоставляет широкие возможности для эффективной работы специалистов–инженеров разных профилей. Поэтому в данном курсе изучаются также система аналитических вычислений Maple, являющимся универсальным математическим пакетом, одному из лидеров в этой области. Таким образом, студенты имеют возможность разрабатывать свои собственные численные алгоритмы, реализовывать их, пользуясь многочисленными средствами этой программы, а также сравнить свои методы со встроенными стандартными.

**Цель преподавания дисциплины** – в результате изучения курса «Численные методы», которые сопровождаются лабораторными занятиями, студент должен овладеть основными методами вычисле-

ний: приближение функций, численное интегрирование, численное решение систем линейных уравнений, решению одного уравнения и систем нелинейных уравнений. Научиться реализовывать эти методы на ЭВМ, уметь составлять тестовые примеры для отладки программы, анализировать полученные результаты. На лабораторных занятиях целью ставится также освоение математических пакетов: системы аналитических вычислений. Студент должен научиться, не только программировать в этих пакетах, но и использовать встроенные функции и пакеты.

Курс рассчитан на два семестра. Предусмотрено чтение лекций (одна пара в неделю) и проведение лабораторных занятий (одна пара в неделю) в компьютерном классе. Студенты должны выполнить лабораторные задания на ЭВМ, сдать отчет и получить зачет по каждому заданию. В конце семестра студенты по данному курсу сдают экзамен по основным темам, прочитанным на лекциях.

## **2. Рабочая программа**

Рабочая программа по учебной дисциплине «Численные методы» составлена на основе Государственного образовательного стандарта полного высшего профессионального образования по специальности «Информационные системы и технологии» и относится к циклу общих математических и естественнонаучных дисциплин.

### **2.1. Учебно-тематический план курса**

Семестры: первый и второй.

Лекции: 34/34 (часов).

Лабораторные занятия: 34/34 (часов).

Итого аудиторных занятий: 68/68 (часов).

Контрольные работы: 0/4 (часов).

Экзамены: 0.4/0.4 (часов).

Зачеты: 0.2/0.2 (часов).

Самостоятельная работа: 68/68 (часов).

(Числитель – первый семестр, знаменатель – второй семестр)

## 2.1.1. Учебно-тематический план лекционного курса

### 1. Погрешность приближенных вычислений

Основные этапы вычислительного эксперимента. Источники и классификация погрешности. Погрешность задачи. Погрешность метода. Погрешность округлений. Абсолютная и относительная погрешности. Аналитический и статистический способы учета погрешностей действий. Погрешность машинной арифметики. Корректность математических задач. Пример неустойчивого метода вычислений.

#### Литература

- [1] – глава 1, §1-6;
- [5] – глава 1, § 1.1-1.5;
- [8] – часть 1, §1 – 2;
- [9] – глава 1, § 2;

(Лекции – 4 часа, самостоятельная работа – 4 часа)

### 2. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

#### Прямые методы.

Постановка задачи. Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса. Вычисление определителей. Решение линейных систем с помощью LU разложения. Число обусловленности.

#### Литература

- [1] – глава 6, §1-2;
- [5] – глава 2, § 2.0-2.4, § 2.8;
- [8] – часть II, глава 1, §1 – 4,6;
- [9] – глава V, § 1-4, 7,
- [10] – глава III, § 1-2;

(Лекции – 8 часов, самостоятельная работа – 8 часов)

#### Итерационные методы.

Метод простых итераций. Метод Якоби. Метод Зейделя. Условия сходимости итерационных методов. Апостериорная и априорная оценка погрешности итерационного метода. Метод релаксации.

### **Литература**

- [1] – глава 6, §3-8;
- [5] – глава 3, § 3.1-3.3, § 3.7;
- [8] – глава 2, §1 – 4;
- [9] – глава V, § 3
- [10] – глава III, § 3;

*(Лекции – 4 часа, самостоятельная работа – 4 часа)*

## **3. Решение нелинейных уравнений**

Локализация корней. Метод половинного деления. Метод простых итераций. Метод Ньютона. Промежуток выбора начальной точки в методе Ньютона. Метод секущих. Скорость сходимости итерационных методов. Комбинированные методы.

### **Литература**

- [5] – глава 7, § 7.1-7;
- [8] – часть II, глава 5, §1 – 3;
- [9] – глава V, § 2;
- [16].

*(Лекции – 6 часов, самостоятельная работа – 6 часов)*

## **4. Решение систем нелинейных уравнений**

Метод простых итераций. Принцип сжимающих отображений. Метод Ньютона. Метод градиентного спуска.

### **Литература**

- [1] – глава 7, §1-3, 6;
- [5] – глава 9, § 9.1-9.2;
- [8] – часть II, глава 5, §4;
- [9] – глава V, § 3;
- [10] – глава III, § 7;

*(Лекции – 4 часа, самостоятельная работа – 4 часа)*

## 5. Интерполяция

### Полиномиальная интерполяция

Задача и способы аппроксимации функций. Линейная интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Погрешность интерполяционного многочлена Лагранжа. Конечные разности. Интерполяционный многочлен Ньютона. Обратное интерполирование. Погрешность. Кусочно-полиномиальная интерполяция. Интерполяция сплайнами.

### **Литература**

- [1] – глава 1, §1-11, § 13-16;
- [6] – глава 1, § 1.1-1.5, глава 4, §4.1-4.3;
- [8] – часть II, глава 3, §1 – 2,4;
- [9] – глава II, § 1;
- [10] – глава II, § 1;
- [14];

(Лекции – 8 часов, самостоятельная работа – 8 часов)

### Метод наименьших квадратов

Обработка эмпирических данных методом наименьших квадратов. Многочлены наилучших среднеквадратических приближений. Системы ортогональных многочленов. Аппроксимация функций многочленами Фурье.

### **Литература**

- [1] – глава 5, §1-3;
- [6] – глава 3, §3.1-3.2, § 3.4-3.5;
- [8] – часть II, глава 3, §5 – 6;
- [9] – глава II, § 2.

(Лекции – 6 часов, самостоятельная работа – 6 часов)

## 6. Численное интегрирование

Задача численного интегрирования. Полиномиальная аппроксимация. Составная формула трапеций. Формула прямоугольников. Формула Симпсона. Принцип Рунге

Формула Симпсона. Принцип Рунге практического оценивания погрешностей.

### Литература

- [1] – глава 3, §1-3;
- [8] – часть II, глава 4, §1 – 3;
- [9] – глава IV, § 1;
- [10] – глава II, § 2;
- [14];

(Лекции – 8 часов, самостоятельная работа – 8 часов)

## 7. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

### Задача Коши

Постановка задачи. Методы решения. Метод Эйлера. Семейство методов Рунге-Кутты. Методы второго порядка. Метод четвертого порядка. Пошаговый контроль точности.

### Литература

- [1] – глава 8, §1-4;
- [6] – глава 7, §7.1 – 7.6;
- [8] – часть II, глава 6, §1 – 2;
- [9] – глава VII, § 1;
- [10] – глава V, § 1-2;
- [17].

(Лекции – 8 часов, самостоятельная работа – 8 часов)

### Краевые задачи

Методы сведения краевых задач к начальным. Метод пристрелки. Метод редукции. Метод конечных разностей. Устойчивость конечно-разностной схемы.

### Литература

- [1] – глава 9, §1-3;
- [6] – глава 10, §10.1-10.4;
- [9] – глава VII, § 2

(Лекции – 4 часа, самостоятельная работа – 4 часа)



## 8. Уравнения в частных производных

### Основные понятия теории разностных схем

Сетка и шаблон. Аппроксимация. Явные и неявные схемы. Невязка. Аппроксимация, ее порядок. Устойчивость. Основные понятия. Связь между устойчивостью и сходимостью. Принцип максимума. Сходимость.

Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Явная схема. Неявная схема.

### **Литература**

[1] – глава 10, §1-4;

[8] – часть III, глава 6, §1 – 3;

[9] – глава IX, § 1-4;

[10] – глава VII, § 1-2;

(Лекции – 8 часов, самостоятельная работа – 8 часов)

№	Тема	Часы	
		лекции	практ. заня- тия.
I семестр			
1	Погрешность приближенных вычислений	4	0
2	Постановка задачи. Алгоритм решения СЛАУ методом Гаусса. Вычисление определителей. Решение линейных систем с помощью LU разложения. Число обусловленности.	8	0
3	Метод простых итераций. Метод Якоби. Метод Зейделя. Условия сходимости итерационных методов. Апостериорная и априорная оценка погрешности итерационного метода. Метод релаксации.	6	4
5	Решение нелинейных уравнений	5	2
6	Решение систем нелинейных уравнений	3	2
7	Интерполяция	2	0
8	Метод наименьших квадратов	2	2
9	Численное интегрирование	2	2
10	Решение обыкновенных дифференциальных уравнений	2	2
11	Уравнения в частных производных	2	0
12		2	1
13		2	0
14		2	1
15		2	1

### 2.1.2. Учебно-тематический план лабораторных занятий

1. Введение в математический пакет Maple. Работа в Maple: интерфейс, основные объекты, операции, функции (8 часов, самостоятельная работа 8 часов).
2. Линейная алгебра. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. (9 часов, самостоятельная работа 9 часов).
3. Линейная алгебра. LU разложение матриц. (8 часов, самостоятельная работа 8 часов).
4. Решение СЛАУ итерационными методами: простых итераций, Якоби, Зейделя. (9 часов, самостоятельная работа 9 часов).
5. Решение нелинейных уравнений методами дихотомии, Ньютона, секущих. (6 часов, самостоятельная работа 6 часов).
6. Решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона. (6 часов, самостоятельная работа 6 часов).
7. Интерполяция. Метод наименьших квадратов. (12 часов, самостоятельная работа 12 часов).
8. Решение дифференциальных уравнений методами Эйлера, Рунге-Кутты. (10 часов, самостоятельная работа 10 часов).

## Литература

1. Бахвалов Н. С., Н. Жидков, Г. Кобельков Численные методы. Лаборатория Базовых Знаний, 2003 г.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы. Издание 3, "Бином. Лаборатория знаний" 2004.
3. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1973.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Тт. 1, 2. М.1962.
5. Вержбицкий В. М., Численные методы (Линейная алгебра и нелинейные уравнения). – М.: ООО “Издательский дом “Оникс 2 век””, 2005. – 432 с.
6. Вержбицкий В. М., Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения.: Высшая школа, 2001 г.
8. Гулин А.В., Самарский А.А., Численные методы. М.: Наука. 1988.
9. Калиткин Н. Н., Численные методы. М.: Наука , 1978.

### Дополнительная литература

10. Самарский А.А. Введение в численные методы. Серия "Классический университетский учебник". Изд.3, 2005 г.
11. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.

### Литература для лабораторных и практических занятий. Методические указания.

12. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех. М.: Мир, 1997.
13. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс. Спб.: Питер, 2001. 624 с.
14. Зеньковская С.М., Моршнева И.В., Цывенкова О.А., Интерполирование. Численное интегрирование. Ч. I. // Методические указания по курсу «Методы вычислений» для студентов механико-математического факультета, 1994, 27 с.
15. Зеньковская С.М., Овчинникова С.Н., Потетюнко Э.Н., Методические указания по курсу «Практикум на ЭВМ». Ч. II. 1979, 23 с.
16. Зеньковская С.М., Овчинникова С.Н. Методические указания по курсу «Практикум на ЭВМ». Численные методы решения одного уравнения. 1985, 30 с.

17. Овчинникова С.Н. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (для студентов 3 и 4 курсов мехмата) // УПЛ РГУ, 2001, 27 с.

## Контрольные вопросы и примеры к основным разделам программы.

### 1. Погрешность приближенных вычислений

1. Как выглядит экспоненциальная форма записи вещественного числа с плавающей запятой?
2. Что такое машинная точность? Как вычислить это число?
3. Какими параметрами характеризуется число с плавающей запятой?
4. Пользуясь представлением функции  $\exp(x)$  в виде ряда

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

вычислить значение этой функции в точке  $x = -6$ . Считать, что на запись числа с плавающей запятой отводится 5 цифр.

### 2. Методы решения СЛАУ

1. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 0.1x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

- Найти детерминант матрицы коэффициентов этой системы при помощи метода Гаусса.
- Выполнить эти задания вручную, считая, что в режиме с плавающей запятой выделяется три десятичных разряда. Сравнить результаты.
- Посчитав невязки приближенного решения, произвести итерационное уточнение.

2. Рассмотреть матрицу, элементы которой задаются формулами

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, i > j, \\ 1, i = j, \\ 0, i < j. \end{cases}$$

Как размер данной матрицы влияет на ее обусловленность?

3. При каких условиях сходится метод простых итераций?
4. Как связан алгоритм метода Гаусса с LU-разложением матрицы системы?

5. Найти LU-разложение матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ . Решить систему  $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ .
6. Пусть матрица  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 4.8 \end{pmatrix}$ . Привести систему  $Ax = b$  к итерационному виду так, чтобы метод простой итерации сходился при любом начальном приближении.
7. Решить систему  $\tilde{A}x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$  методами Зейделя и Якоби. Сравнить результаты и скорость сходимости к решению.

### 3. Решение нелинейных уравнений

1. При помощи дихотомии вычислить  $\sqrt{2}$  с точностью 0.001.
2. Написать формулу нахождения  $\sqrt{2}$ , используя метод Ньютона.
3. Рассмотрите уравнение  $x - x^3 = 0$ . Покажите, что метод Ньютона сходится к каждому из корней. Сравните со сходимостью методов секущих и половинного деления.
4. Как сходится метод касательных для решения уравнения  $\text{sign}(x-3)\sqrt{x-3} = 0$ ? С чем это связано? Постройте график этой функции.
5. Примените к этому уравнению метод простой итерации, сходится ли он, какова скорость сходимости?
6. Рассмотрите уравнение  $x - 3\sin x = 0$ . Определите его корни на  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Примените метод простой итерации так, чтобы он сходился.
7. Выпишите формулы метода Ньютона для решения системы:  $f(x_1, x_2) = 0$ ,  $g(x_1, x_2) = 0$ . Как будет выглядеть модифицированный метод Ньютона?
8. Сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 = y \end{cases}.$$

Найдите два приближения методом Ньютона.

## 4. Интерполяция

Следующие примеры сделать вручную.

1.1. Найти многочлен наименьшей степени, принимающий в заданных точках заданные значения

x	0	1	2	3
y	1	2	7	4

1.2. Построить интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона, если  $f(x_k) = y_k$ ,  $k = 1 \dots n$

а)

$x_k$	1	2	3	4
$y_k$	1	-1	2	3

б)

$x_k$	1	i	-1	-i
$y_k$	1	2	3	4

1.3. Для функции, заданной таблично, найти  $f'(0)$  и  $f'(-1)$ . Оценить погрешность.

$x_k$	0	-1	-2
$y_k$	5	6	9

2. Функция  $\sin x$  приближается на отрезке  $[0, \pi/4]$  интерполяционным многочленом по значениям в точках  $0, \pi/8, \pi/4$ . Оценить погрешность интерполяции на этом отрезке.

3. Оценить число узлов интерполяции на отрезке  $[0, \pi/4]$  обеспечивающее точность  $\varepsilon \leq 10^{-2}$  приближения функции  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ .

4. Определить степень многочлена Лагранжа на равномерной сетке, обеспечивающую точность приближения функции  $e^x$  на отрезке  $[0, 1]$  не хуже  $10^{-3}$ .

5. Построить многочлены Лагранжа и Ньютона для функции  $f(x) = x^2$  по узлам  $x_1, x_2, x_3$ .

6. Построить интерполяционный многочлен по точкам, вычисленным по функции  $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$  (пример Рунге). Что происходит

с ним, когда количество точек разбиения увеличивается.

7. Для функции примера 7. Построить кусочно-линейную интерполяцию. Сравнить результаты.

8. Для наборов данных  $X = [0, 1, 2, \dots]$ ,  $Y = [-1, 2, 3]$  построить вручную полиномы Лагранжа и Ньютона. Сравнить результаты со встроенной командой пакета MAPLE `interp`.

## 5. Численное интегрирование



1. Выписать составную формулу трапеций для вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x) dx$$

при разбиении отрезка  $[a, b]$  на три части.

2. Вычислить  $\int_0^1 x^4 dx$  всеми известными вам способами. Сравните полученные результаты.
3. Вычислить  $\int_0^1 \sqrt{x} dx$  по формуле прямоугольников и трапеции. Сравнить с точным значением.
4. Каким должен быть шаг  $h$  формулы трапеций, чтобы погрешность при вычислении  $\int_0^1 x^4 dx$  по этой формуле была меньше  $\varepsilon = 10^{-5}$ .
5. Каким должен быть шаг  $h$  формулы Симпсона, чтобы погрешность при вычислении  $\int_0^1 x^4 dx$  по этой формуле была меньше  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

## 6. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Как контролируется погрешность численного решения задачи Коши для дифференциального уравнения в методе Рунге-Кутты?
2. Как практически оценивается локальная погрешность методов Рунге-Кутты?
3. Вычислить вручную численное решение задачи Коши  $\frac{dy}{dx} = xy$ ,  $y(0) = 1$  в точке  $x_1 = 1$  с шагами  $h = 0.5$ ,  $h = 0.25$  по формулам Эйлера, Рунге-Кутты. Сравните решения.
4. Напишите расчетные формулы вычисления решения задачи Коши

## 7. Уравнения в частных производных

1. Что такое шаблон разностной схемы?

2. Какая связь существует между сходимостью и устойчивостью?
3. Выпишите явную схему для решения задачи об остывании стержня длины  $l = 1$ , если на краях стержня задан температурный режим  $u(0, t) = 1$ ,  $u(l, t) = 3$ , также известна начальная температура  $u(x, 0) = 2x^2 + 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .
4. Как нужно подбирать шаг по времени и по пространственной переменной, чтобы разностная схема из примера 3 была устойчивой?

## Лабораторные задания

### Задание 1. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) прямыми методами

а) Решить систему  $Ax = b$ , где  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  ме-

тодом Гаусса с постолбцовым выбором главного элемента.

б) Выполнить LU разложение данной матрицы и с его помощью получить решение данной системы, а также вычислить определитель матрицы A.

с) Вычислить число обусловленности  $\text{cond}A$  в основных нормах и охарактеризовать чувствительность данной системы к погрешностям исходных данных.

### Задание 2. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) итерационными методами

С точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$  найти решение системы уравнений  $Ax = b$  с матрицей коэффициентов вида

$$A = \begin{pmatrix} 2.1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0.1 \\ 1 & -0.2 & 2.1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1.1 \\ 2.9 \end{pmatrix}.$$

а) Методом простых итераций.

б) Методом Якоби.

с) Методом Зейделя.

Провести сравнительный анализ примененных методов.

### Задание 3. Решение нелинейных уравнений

Найти корень уравнения  $f(x) = 0$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$  одним из приближенных методов, указанных в задании. Составить отчет.

Для выполнения задачи рекомендуется:

1. Исследовать данную функцию известными методами алгебры или анализа, отделить искомый корень. Можно пользоваться графиком функции  $f(x)$ .

2. Составить и отладить процедуру-функцию вычисления  $f(x)$  и, если нужно,  $f'(x)$ .
3. Запрограммировать указанный в задаче метод в виде процедуры, выбрав необходимые формальные параметры. Отладить эту процедуру на тестовом примере.
4. Решить уравнение  $f(x) = 0$ .
5. Составить отчет по форме:
  - а) Постановка задачи (конкретный вариант). Исследование функции  $f(x)$ , отделение корней.
  - б) Блок-схема алгоритма метода.
  - в) Текст программы на выбранном алгоритмическом языке. Результаты тестирования.
  - г) Результаты вычислений.

## Методы

### I. Методы:

1. Метод бисекции;
2. Метод касательных (Ньютона);
3. Метод секущих;
4. Метод простой итерации;

### II. Варианты заданий:

1.  $3 \sin \sqrt{x} + 0.35x - 3.8 = 0$ , метод – 4;
2.  $0.25x^3 + x - 1.2502 = 0$ , метод – 2;
3.  $x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2.5 = 0$ , метод – 1;

## Задание 4. Интерполяция

Функция  $f(x)$  задана таблицей значений  $y_i = f(x_i)$ :

$x_i$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$y_i$	0.1	0.098	.3095	.4840	.4222	.0519	-0.2783	-0.0967	.1989

1. Даны три точки  $x_1=0.25$ ,  $x_2=0.8$ ,  $x_3=1.2$ .
  - а) Записать интерполяционные формулы Лагранжа первой и второй степени, подходящие для вычисления приближенных значений  $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = f(x_2)$ ,  $y_3 = f(x_3)$  функции в этих точках.
  - б) Составить таблицу конечных разностей, записать подходящие для вычисления  $y_1$   $y_2$   $y_3$  конечноразностные формулы.
2. Методом наименьших квадратов аппроксимировать  $f(x)$

- а) линейной функцией;
  - б) многочленами Фурье второй и третьей степени.
- Сравнить величины среднеквадратических отклонений.

## Задание 5. Численное интегрирование

Вычислить интеграл  $I = \int_a^b f(x)dx$  с заданной точностью  $\varepsilon$  по одной

из квадратурных формул Ньютона-Котеса:

- 1) средних прямоугольников;
- 2) трапеций;
- 3) Симпсона.

Для оценки погрешности применить правило Рунге. Провести тестирование программы на отладочном примере.

Программа запрашивает пользователя точность  $\varepsilon$ , результатом является приближенное значение интеграла  $I$  и число разбиений отрезка.

Вместе с программой сдается отчет следующего содержания:

1. Метод численного интегрирования (теория к методу).
2. Описание алгоритма (текст программы с пояснениями или блок схема).
3. Результаты работы программы для основного и тестового примера.

### Варианты заданий.

1.  $f(x) = \frac{\ln x}{x(1 + \ln x)}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 3.5$ , метод Симпсона,
2.  $f(x) = tg^2 x + ctg^2 x$ ,  $a = \pi/6$ ,  $b = \pi/3$ , метод трапеций,
3.  $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ ,  $a = 1$ ,  $b = 4$ , метод средних прямоугольников.

## Задание 6. Численное решение дифференциальных уравнений

Дано дифференциальное уравнение первого порядка и начальное условие:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xe^{xy}}{(1+x^2)e^{1+x}}, \quad y(0) = 1.$$

Составить программы вычисления значения решения с заданной точностью методами:

- a) Эйлера с постоянными шагом;
- b) Рунге-Кутта с постоянным шагом;
- c) Рунге-Кутта с автоматическим выбором шага для достижения заданной точности  $\varepsilon = 0.0001$ .

## **Перечень выносимых на экзамен вопросов**

1. Источники и классификация погрешности. Абсолютная и относительная погрешности.
2. Погрешность машинной арифметики. Корректность математических задач.
3. Алгоритм решения СЛАУ и нахождения определителя матрицы методом Гаусса.
4. Решение линейных систем с помощью LU разложения.
5. Число обусловленности матрицы.
6. Метод простых итераций. Условия сходимости.
7. Метод Якоби. Условия сходимости.
8. Метод Зейделя. Условия сходимости.
9. Метод половинного деления. Метод простых итераций.
10. Метод Ньютона. Метод секущих.
11. Метод Ньютона для систем нелинейных уравнений.
12. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
13. Интерполяционный многочлен Ньютона.
14. Кусочно-полиномиальная интерполяция. Интерполяция сплайнами.
15. Метод наименьших квадратов.
16. Аппроксимация функций многочленами Фурье.
17. Численное интегрирование.
18. Метод Эйлера решения задачи Коши для дифференциального уравнения.
19. Семейство методов Рунге-Кутты. Пошаговый контроль точности.
20. Метод пристрелки.
21. Метод редукиции решения краевой задачи.
22. Сетка и шаблон. Явные и неявные схемы. Невязка. Аппроксимация, ее порядок.
23. Устойчивость конечно-разностной схемы. Принцип максимума.
24. Сходимость конечно-разностной схемы.

## Глоссарий

**Абсолютная погрешность** данного числа  $a$ , которое рассматривается как приближённое значение некоторой величины, точное значение которой равно  $x$ , есть разность  $x - a$ .

**Аппроксимация** – (от лат. *approximo* - приближаюсь), замена одних математических объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным. Алгоритм позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны).

**Асимптотическое выражение** – сравнительно простая элементарная функция, приближённо равная (с как угодно малой относительной погрешностью) более сложной функции при больших значениях аргумента (или при значениях аргумента, близких к данному значению, например нулю); Асимптотическое выражение иногда называется также асимптотической формулой или оценкой.

**Вычислительная математика** – раздел математики, включающий круг вопросов, связанных с использованием электронных вычислительных машин (ЭВМ). Содержание термина "Вычислительная математика" нельзя считать установившимся, так как эта область интенсивно развивается в связи с быстро растущими применениями ЭВМ в новых направлениях. Часто термин "Вычислительная математика" понимается как теория численных методов и алгоритмов решения типовых математических задач.

**Интерполяционные формулы** – формулы, дающие приближённое выражение функции  $y = f(x)$  при помощи интерполяции, т. е. через интерполяционный многочлен  $P_n(x)$  степени  $n$ , значения которого в заданных точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$  совпадают со значениями  $y_0, y_1, \dots, y_n$  функции  $f$  в этих точках. Многочлен  $P_n(x)$  определяется единственным образом, но в зависимости от задачи его удобно записывать различными по виду формулами.

**Интерполяция** – отыскание промежуточных значений величины по некоторым известным её значениям. Например, отыскание значений



функции  $f(x)$  в точках  $x$ , лежащих между точками (узлами И.)  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , по известным значениям  $y_i = f(x_i)$  (где  $i = 0, 1, \dots, n$ ). В случае, если  $x$  лежит вне интервала, заключённого между  $x_0$  и  $x_n$ , аналогичная задача называется задачей экстраполяции.

**Итерация** – (от лат. *iteratio* - повторение) результат повторного применения какой-либо математической операции. Так, если  $y = f(x) \circ f_1(x)$  есть некоторая функция от  $x$ , то функции  $f_2(x) = f[f_1(x)]$ ,  $f_3(x) = f[f_2(x)]$ , ...,  $f_n(x) = f[f_{n-1}(x)]$  называется соответственно второй, третьей, ...,  $n$ -й итерациями функции  $f(x)$ .

**Квадратурные формулы** – формулы, служащие для приближённого вычисления определённых интегралов по значениям подынтегральной функции в конечном числе точек. Наиболее распространённые Квадратурные формулы имеют вид:

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 f(x_1) + \dots + A_n f(x_n) + R_n,$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — узлы К. ф.,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — её коэффициенты и  $R_n$  — остаточный член.

**Краевые задачи** – задачи, в которых из некоторого класса функций, определённых в данной области, требуется найти ту, которая удовлетворяет на границе (крае) этой области заданным условиям. Функции, описывающие конкретные явления природы (физические, химические и др.), как правило, представляют собой решения уравнений математической физики, выведенных из общих законов, которым подчиняются эти явления.

**Корректные и некорректные задачи** – классы математических задач, которые различаются степенью определённости их решений. Многие математические задачи состоят в том, что по исходным данным  $u$  ищется решение  $z$ . При этом считается, что  $u$  и  $z$  связаны функциональной зависимостью  $z = R(u)$ . Задача называется корректной задачей (или корректно поставленной), если выполнены следующие условия (условия корректности): 1) задача имеет решение при любых допустимых исходных данных (существование решения); 2) каждым исходным данным  $u$  соответствует только одно решение (однозначность задачи); 3) решение устойчиво.

**Линейное уравнение** – уравнение, в которое неизвестные входят в 1-й степени (т. е. линейно) и отсутствуют члены, содержащие произведения неизвестных. Несколько линейных уравнений относительно

одних и тех же неизвестных образуют систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

**Матрица** - двумерный массив однотипных элементов. Положение элемента в матрицы определяется номером строки и номером столбца.

**Нелинейные системы** – колебательные системы, свойства которых зависят от происходящих в них процессов. Колебания таких систем описываются нелинейными уравнениями, а сами системы называются Нелинейными системами. Нелинейными являются механические системы, в которых модули упругости тел зависят от деформаций последних или коэффициента трения между поверхностями тел зависит от относительной скорости этих тел (скорости скольжения), или, наконец, массы тел зависят от их скоростей; электрические системы, содержащие сегнетоэлектрики, диэлектрическая проницаемость которых зависит от напряжённости электрического поля, и т.д.

**Нуль функции** – точка, где заданная функция  $f(z)$  обращается в нуль; таким образом, Нуль функции  $f(z)$  – это то же самое, что и корни уравнения  $f(z) = 0$ .

**Ньютона метод** – метод приближённого нахождения корня  $x_0$  уравнения  $f(x) = 0$ , называемый также методом касательных. Ньютона метод состоит в том, что по исходному ("первому") приближению  $x = a_1$  находят второе (более точное), проводя касательную к графику  $y = f(x)$  в точке  $A[a_1, f(a_1)]$  до её пересечения с осью  $Ox$ ; точка пересечения  $x = a_1 - f(a_1)/f'(a_1)$  и принимается за новое значение  $a_2$  корня. Повторяя в случае необходимости этот процесс, получают всё более и более точные приближения  $a_2, a_3, \dots$  корня  $x_0$  при условии, что производная  $f'(x)$  монотонна и сохраняет знак на сегменте, содержащем  $x_0$ .

**Округление числа** – приближённое представление числа в некоторой системе счисления с помощью конечного количества цифр. Необходимость округления диктуется потребностями вычислений, в которых, как правило, окончательный результат не может быть получен абсолютно точно, и следует избегать бесполезного выписывания лишних цифр, ограничивая все числа лишь нужным количеством знаков.

**Особая матрица** – квадратная матрица  $A$  порядка  $n$ , определитель которой равен нулю, т. е. ранг которой меньше  $n$ . Матрица является особой в том и только в том случае, когда между её строками (а также и между столбцами) существует линейная зависимость.

**Остаточный член** – приближённой формулы, разность между точным и приближённым значениями представляемого этой формулой выражения.

**Относительная погрешность.** Отношение  $x - a$  к  $a$  называют относительной погрешностью числа  $a$ , где  $x$  – приближенное значение числа  $a$ .

**Последовательных приближений метод** – метод решения математических задач при помощи такой последовательности приближений, которая сходится к решению и строится рекуррентно (т. е. каждое новое приближение вычисляют, исходя из предыдущего). Последовательных приближений метод применяется для приближённого нахождения корней алгебраических и трансцендентных уравнений, для доказательства существования решения и приближённого нахождения решений дифференциальных, интегральных и интегродифференциальных уравнений, для качественной характеристики решения и в ряде др. математических задач.

**Приближение и интерполирование функций** – раздел теории функций, посвященный изучению вопросов приближённого представления функций.

**Приближение функций** – нахождение для данной функции  $f$  функции  $g$  из некоторого определённого класса (например, среди алгебраических многочленов заданной степени), в том или ином смысле близкой к  $f$ , дающей её приближённое представление. Существует много разных вариантов задачи о приближении функций в зависимости от того, какие функции используются для приближения, как ищется приближающая функция  $g$ , как понимается близость функций  $f$  и  $g$ . Интерполирование функций — частный случай задачи приближения, когда требуется, чтобы в определённых точках (узлах интерполирования) совпадали значения функции  $f$  и приближающей её функции  $g$ , а в более общем случае — и значения некоторых их производных.

**Ранг матрицы** – наивысший из порядков отличных от нуля миноров этой матрицы. Ранг матрицы равен наибольшему числу линей-

но-независимых строк (или столбцов) матрицы.  $P$  не меняется при элементарных преобразованиях матрицы (перестановке строк или столбцов, умножений строки или столбца на отличное от нуля число и при сложении строк или столбцов).

**Сеток метод** – собирательное название группы приближённых методов решения дифференциальных, интегральных и интегродифференциальных уравнений. Применительно к дифференциальным уравнениям с частными производными термин "Сеток метод" используется в качестве синонима терминов "метод конечных разностей" и "разностный метод". Суть метода сеток состоит в следующем: область непрерывного изменения аргументов, в которой ищется решение уравнения, дополненного, если необходимо, краевыми и начальными условиями, заменяется дискретным множеством точек (узлов), называемым сеткой. Вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определяемые в узлах сетки и называемые сеточными функциями; производные, входящие в уравнение, краевые и начальные условия, аппроксимируются разностными отношениями. Интегралы аппроксимируются квадратурными формулами; при этом исходное уравнение (задача) заменяется системой (линейных, если исходная задача была линейной) алгебраических уравнений (системой сеточных уравнений, а применительно к дифференциальным уравнениям – разностной схемой).

**Собственные значения** – линейного преобразования или оператора  $A$ , числа  $\lambda$ , для которых существует ненулевой вектор  $x$  такой, что  $Ax = \lambda x$ ; вектор  $x$  называется собственным вектором.

**Сходимость** – математическое понятие, означающее, что некоторая переменная величина имеет предел. Понятие сходимости возникает, например, когда при изучении того или иного математического объекта строится последовательность более простых в известном смысле объектов, приближающихся к данному, то есть имеющих его своим пределом (так, для вычисления длины окружности используется последовательность длин периметров правильных многоугольников, вписанных в окружность; для вычисления значений функций используются последовательности частичных сумм рядов, которыми представляются данные функции, и т. п.).

**Устойчивость решений дифференциальных уравнений** – понятие качественной теории дифференциальных уравнений, разрабаты-

вающееся особенно в связи с вопросами устойчивости движения в механике; имеет также важное значение для приложений в технике.

**Численные методы в математике** – методы приближённого решения математических задач, сводящиеся к выполнению конечного числа элементарных операций над числами. В качестве элементарных операций фигурируют арифметические действия, выполняемые обычно приближённо, а также вспомогательные операции — записи промежуточных результатов, выборки из таблиц и т.п. Числа задаются ограниченным набором цифр в некоторой позиционной системе счисления (десятичной, двоичной и т.п.). Таким образом, в Численных методах числовая прямая заменяется дискретной системой чисел (сеткой); функция непрерывного аргумента заменяется таблицей её значений в сетке; операции анализа, действующие над непрерывными функциями, заменяются алгебраическими операциями над значениями функций в сетке. Ч. м. сводят решение математических задач к вычислениям, которые могут быть выполнены как вручную, так и с помощью вычислительных машин. Разработка новых Численных методов и применение их в ЭВМ привели к возникновению вычислительной математики.

**Численное решение уравнений** – нахождение приближённых решений алгебраических и трансцендентных уравнений. Численное решение уравнений сводится к выполнению арифметических операций над коэффициентами уравнений и значениями входящих в него функций и позволяет найти решения уравнений с любой наперёд заданной точностью. К Численному решению уравнений сводятся многие задачи математики и её приложений.

Численное решение алгебраических уравнений разбивается на следующие этапы: 1) выделение кратных корней, сводящее задачу к решению уравнения с простыми корнями; 2) определение границ, между которыми могут лежать корни уравнения; 3) разделение корней, т. е. указание промежутков, каждый из которых содержит не более одного простого корня (см. Штурма правило); 4) грубое определение приближённого значения корня, выполняемое графически или каким-либо иным способом (например, при помощи изучения перемен знака левой части уравнения); 5) вычисление корня с заданной точностью.